

Leçon 208 : Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

[Bat-Zin] : *De l'Analyse fonctionnelle à la Théorie spectrale*, Athanasios Batakis, Michel Zinsmeister

[Ber-Ber] : *Analyse pour l'agrégation de mathématiques*, Julien Bernis, Laurent Bernis

[Dan] : *Mathématiques pour l'agrégation*, Jean-François Dantzer

[Gou] : *Analyse*, Xavier Gourdon

[Li] : *Cours d'analyse fonctionnelle*, Daniel Li

I Partie A - Rappels succincts [Li] [Dan] [Gou]

I.1 Définitions, propriétés

Prop 1 (Application linéaire continue) :

Déf 2 (Norme subordonnée) :

Prop 3 (Calcul effectif d'une norme subordonnée) :

Ex 4 : Calcul de la norme de $\varphi(u) = \sum u_n/2^n$.

Prop 5 (Propriété multiplicative de la norme) :

Déf 6 (Normes équivalentes, normes plus fines) :

Ex 7 : Norme dans $\mathcal{C}^1([0, 1])$ (Espace de Sobolev).

Ex 8 : Dans $\mathcal{C}([0, 1])$, $\|\cdot\|_\infty$ est plus fine que $\|\cdot\|_1$, mais les normes ne sont pas équivalentes.

I.2 Espaces de Banach [Ber-Ber]

Déf 9 (Suite de Cauchy) :

Prop 10 : (1) Une suite convergente dans X est de Cauchy.
 (2) Toute suite de Cauchy dans X est bornée.
 (3) Toute sous-suite d'une suite de Cauchy est encore de Cauchy.

Déf 11 (Espaces de Banach, de Hilbert) :

Ex 12 : Espaces de dimension finie

Thm 13 (Critère de Banach avec la convergence de séries) :

App 14 (Riesz-Fischer) :

Thm 15 (Espace $\mathcal{C}^0$) :

Dév 16 (Espaces de Bergman) :

Prop 17 : Si F est complet, alors $\mathcal{L}(E, F)$ est complet.

Ex 18 : E^* est toujours complet.

App 19 : Si $\|u\| < 1$, alors $Id - u$ est inversible.

Prop 20 (Opérateurs de Hilbert-Schmidt) :

I.3 Particularités de la dimension finie

Thm 21 (Équivalence des normes) :

App 22 : Une application linéaire en dimension finie est continue.

Thm 23 (Riesz) :

App 24 : Tout compact en dimension infinie est d'intérieur vide.

II Partie B - Baire, Baire, Baire [Li] [Gou]

Thm 25 (Baire) :

Rem 26 : Autre formulation du théorème de Baire

Thm 27 : L'ensemble des fonctions dans $\mathcal{C}([0, 1])$ qui ne sont dérivables en aucun point est dense dans $\mathcal{C}([0, 1])$, c'est même une densité générique.

App 28 : Soit $X \subset \mathcal{C}^1([0, 1])$ un sev fermé de $\mathcal{C}([0, 1])$. Alors X est de dimension finie.

Thm 29 (Banach-Steinhaus) :

Thm 30 (Application ouverte) :

Thm 31 (Isomorphisme de Banach) :

Thm 32 (Graphe fermé) :

App 33 : La transformation de Fourier $\mathcal{F} : L^1 \rightarrow \mathcal{C}^0$ n'est pas surjective.

App 34 : Si E_1 et E_2 sont deux sev fermés supplémentaires, alors ils sont supplémentaires topologiques.

III Partie C - Hahn-Banach ! [Li]

Thm 35 (Hahn-Banach Analytique) :

Rem 36 : Le théorème de Hahn-Banach permet d'étendre aux espaces de Banach les résultats dans les Hilberts.

Thm 37 (Hahn-Banach Topologique) :

App 38 (Limite de Banach) :

App 39 : $\Psi : u \in \ell^1 \rightarrow (v \rightarrow \sum u_n v_n) \in (\ell^\infty)^*$ n'est pas surjective.

Thm 40 : Si F est un sev fermé de E et $x_0 \notin F$, il existe $\varphi \in E^*$ telle que $\varphi(x_0) = 1$ et $\varphi(x) = 0$ sur F .

Cor 41 (Critère de densité) :

Thm 42 (Hahn-Banach Géométrique) :

App 43 : Le truc sur $O_n(\mathbb{R})$.

IV Partie D - Opérateurs compacts [Li] [Bat-Zin]

IV.1 Définitions et premières propriétés

Déf 44 : $T : E \rightarrow F$ est un opérateur compact si $T(B_E)$ est relativement compact dans F .

Ex 45 : Les opérateurs de rang finis sont compacts.

Ex 46 : Si $K \in L^2([0, 1]^2)$, alors $T_K : f \rightarrow \int_0^1 K(\cdot, y)f(y)dy$ est compact dans $L^2([0, 1])$.

Prop 47 : L'ensemble $\mathcal{K}(E, F)$ est un sev fermé de $\mathcal{L}(E, F)$.

App 48 : Une limite d'opérateurs de rang finis est compacte.

Prop 49 : $\mathcal{K}(E, F)$ est un idéal bilatère.

App 50 : Un opérateur compact n'est pas inversible si E et F sont de dim infinie.

Thm 51 (Schauder) : L'opérateur $T : E \rightarrow F$ est compact si et seulement si $T^* : F^* \rightarrow E^*$ est compact.

IV.2 Analyse spectrale

 **Dév 52 :** Si $T \in \mathcal{K}(E)$:

- (1) $\ker(I - T)$ est de dim finie.
- (2) $R(I - T)$ est fermée
- (3) Si $I - T$ est injectif, alors il est inversible.

 **Dév 53 (Alternative de Fredholm) :**

Thm 54 (Spectre d'un opérateur compact) :

Ex 55 : Spectre de l'opérateur de Volterra / Quasi-Primitive